

۱- گزینه «۳»

در گزینه (۱) وجه‌های ۲ و ۳ روبه‌روی هم‌اند.
در گزینه (۲) وجه‌های ۱ و ۵ روبه‌روی هم‌اند.
گزینه ۴ اصلاً نمی‌تواند گسترده هیچ مکعبی باشد.

۲- گزینه «۱»

با تا کردن شکل گزینه الف مربع خواسته شده ساخته می‌شود.

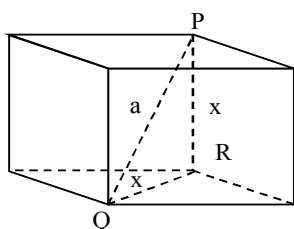


۳- گزینه «۲»

۴- گزینه «۴»

در گزینه (۱)، ۴ و ۳ روبه‌روی هم، ۱ و ۵ روبه‌روی هم، ۲ و ۶ هم روبه‌روی هم‌اند.
در گزینه (۲)، ۴ و ۲ روبه‌روی هم، ۱ و ۶ روبه‌روی هم، ۵ و ۳ هم روبه‌روی هم‌اند.
در گزینه (۳)، ۳ و ۶ روبه‌روی هم، ۵ و ۲ روبه‌روی هم، ۱ و ۴ هم روبه‌روی هم‌اند.
در گزینه (۴) که جواب مسأله است عددها هم آن‌طور که خواسته مسأله است روبه‌روی هم چیده شده‌اند.

۵- گزینه «۱»



$$QR^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow QR = \sqrt{2}x$$

در مثلث قائم‌الزاویه PQR داریم:

مساحت یک وجه

$$a^2 = x^2 + (\sqrt{2}x)^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\text{سطح کل مکعب} = \frac{a^2}{3} \times 6 = 2a^2$$

پاسخ تشریحی فصل دوازدهم

مساحت و حجم

۱۳- گزینه «۱»

$$3600 \div 6 = 600$$

$$12/6 \times 1000 = 12600 \text{ لیتر}$$

$$600 \times 7 = 4200 \text{ لیتر در هر ساعت}$$

$$12600 \div 4200 = 3 \text{ ساعت}$$

$$V = 3/5 \times 2 \times 1/8 = 12/6 \text{ مترمکعب}$$

۱۴- گزینه «۲»

هر کدام از ۶ وجه مکعب اولیه، کماکان باقی مانده‌اند. در کنار هر گوشه از مکعب اولیه (که تعدادشان ۸ تا است) ۳ وجه ۱×۱ تولید شده است. یعنی وجه قدیمی به اضافه ۳×۸ = ۲۴ وجه جدید.

۱۵- گزینه «۱»

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow 8\pi = \frac{1}{3} \pi R^2 (3R) \Rightarrow R^3 = 8 \Rightarrow R = 2$$

۱۶- گزینه «۱»

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ مخروط}$$

$$V = \frac{\pi \times 2 \times 2 \times 2/5}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{10\pi}{3} \div 0.2 = \frac{10\pi}{3} \times 5 = \frac{50\pi}{3}$$

۱۷- گزینه «۴»

چنانچه مساحت قاعده و ارتفاع یک استوانه و یک مخروط با هم مساوی باشند، حجم مخروط $\frac{1}{3}$ حجم استوانه خواهد بود و در این جا نظر به این که ارتفاع مخروط دو برابر ارتفاع استوانه است لذا، حجم مخروط $\frac{2}{3}$ حجم استوانه می‌شود و $\frac{1}{3}$ از استوانه خالی می‌ماند.

$$6 \times \frac{1}{3} = 2$$

۶- گزینه «۲»

مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است.

$$AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

$$\hat{B} = 90^\circ \rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{2} = 2\sqrt{2}$$

۷- گزینه «۳»

ابتدا مکعب را مطابق شکل باز می‌کنیم.

$$\hat{B} = 90^\circ \rightarrow$$

$$AH^2 = AB^2 + HB^2 \rightarrow$$

$$AH^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow AH = 10$$

۸- گزینه «۴»

فقط مکعب‌هایی که در مرکز هر وجه قرار گرفته‌اند این خاصیت را دارند.

۹- گزینه «۳»

این شکل در حقیقت یک مکعب کامل و توپر $5 \times 5 \times 5$ است که یک مکعب کامل $3 \times 3 \times 3$ را از درون آن خارج کرده‌ایم. پس تعداد مکعب‌های آن برابر است با:

$$5 \times 5 \times 5 - 3 \times 3 \times 3 = 125 - 27 = 98$$

۱۰- گزینه «۴»

اگر ضلع مکعب m برابر شود حجم آن m^3 برابر می‌شود.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

۱۱- گزینه «۱»

$$ab = 12, ac = 8, bc = 6 \rightarrow (abc)^2 = 12 \times 8 \times 6 = 576 \rightarrow V_{abc} = 24$$

۱۲- گزینه «۳»

$$2(6 \times 5) = 60 \text{ cm}^2, 2(6 \times 8) = 96 \text{ cm}^2, 2(8 \times 5) = 80 \text{ cm}^2$$

$$60 + 96 + 80 = 236 \text{ cm}^2$$

۱۸- گزینه «۴»

$$\text{قطر دایره} = 20 \times 2 = 40$$

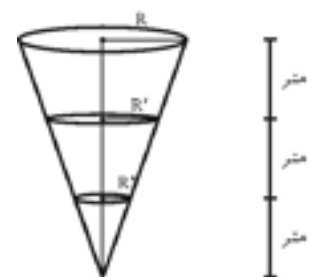
$$\text{محیط دایره} = 40 \times 3/14 = 125/6$$

$$\text{محیط قاعده مخروط} = 31/4 \div 3/14 = 10$$

$$\text{محیط قاعده مخروط} = 125/6 \div 40 = 3/14 \Rightarrow \text{محیط دایره} = 1/4$$

$$10 \div 2 = 5 \Rightarrow \text{شعاع قاعده مخروط}$$

۱۹- گزینه «۴»



$$\frac{R''}{R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{R''}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow R'' = 1$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{R'}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow R' = 2$$

$$\text{حجم پایینی مخزن} = \frac{1}{3} \pi R''^2 \times 1 = \pi$$

$$\text{حجم پایینی مخزن} = \frac{1}{3} \pi R'^2 \times 2 = 8\pi$$

$$\text{حجم کل مخزن} = \frac{1}{3} \pi R^2 \times 3 = 9\pi$$

$$\frac{8\pi - \pi}{9\pi - \pi} = \frac{7\pi}{8\pi} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{35}{x} = \frac{7}{8} \Rightarrow x = 40$$

۳۵ دقیقه

۲۰- گزینه «۲»

دو تا مخروط مساوی درست شده است.

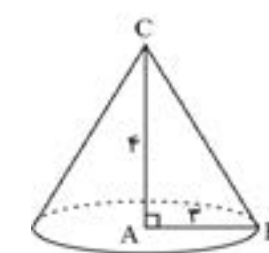
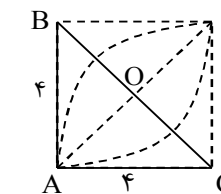
$$BC^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر دایره}$$

۲۱- گزینه «۳»

اگر این مثلث حول ضلع AC دوران کند یک مخروط قائم به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۳ به وجود می آید.

$$\text{حجم مخروط تولید شده} = \frac{1}{3} \pi AC \times AB^2$$

$$\text{حجم مخروط تولید شده} = \frac{1}{3} \times 4 \times \pi \times 3^2 = 12\pi$$



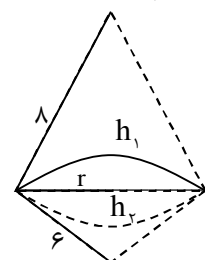
۲۲- گزینه «۱»

$$2R^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow \text{شعاع و ارتفاع}$$

$$V = \frac{3 \times 3 \times \pi \times 3}{3} = 9\pi$$

۲۳- گزینه «۲»

دو تا مخروط درست می شود که شعاع قاعده آن دو و ارتفاع های آن مخروط هستند و مجموع دو ارتفاع با وتر مثلث قائم الزاویه برابر است که طبق رابطه فیثاغورس $h_1 + h_2 = 10$ می باشد.



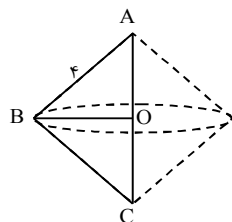
$$r \times 10 = 8 \times 6 \Rightarrow r = 4/8$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi \times (4/8)^2 \times h_1 + \frac{1}{3} \pi \times (4/8)^2 \times h_2$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times (4/8)^2 \times (h_1 + h_2) = \frac{1}{3} \pi \times 23/0.4 \times 10 = 76/8\pi$$

۲۴- گزینه «۲»

دو تا مخروط با اندازه های مساوی درست می شود که شعاع آن ها $2\sqrt{3}$ و ارتفاع هر کدام ۲ می باشد.



$$BO^2 = AB^2 - AO^2 \Rightarrow BO^2 = 16 - 4 \Rightarrow BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \pi \times 2}{3} = 16\pi$$

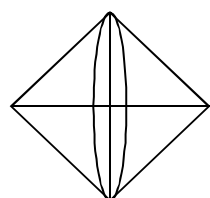
۲۵- گزینه «۴»

$$2R = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} sh = \frac{1}{3} \times 4\pi \times 3 = 4\pi$$

$$S = \pi R^2 = 4\pi$$

$$V = 2V_1 = 2 \times 4\pi = 8\pi$$



۲۶- گزینه «۳»

چون 180° دوران پیدا کرده در نتیجه نیم کره درست شده است که شعاع آن $1/5$ سانتی متر است.

$$V = \frac{4 \times 1/5 \times 1/5 \times 1/5 \times 3/14}{3 \times 2} = 7/0.65 \text{ cm}^3$$

۲۷- گزینه «۳»

اگر شعاع کره‌ای m برابر شود حجم آن m^3 برابر می‌شود.
اگر شعاع ۱۰۰٪ افزایش یابد دو برابر می‌شود در نتیجه حجم آن ۸ برابر خواهد شد.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi (2R)^3 = 8 \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 8V_1$$

$$V_2 - V_1 = 8V_1 - V_1 = 7V_1$$

درصد ۷۰۰ $\Rightarrow$ ۷ برابر افزایش یافته

۲۸- گزینه «۳»

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \frac{4\pi r^3}{4\pi r^2} = 3 \quad r = 3$$

اگر شعاع دایره ۳ باشد عدد حجم کره و مساحت کره با هم برابر و هر دو $113/04$ می‌باشند.

۲۹- گزینه «۳»

$$4\pi r^2 = S$$

$$r^2 = \frac{S}{4\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

۳۰- گزینه «۱»

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r^3 = \frac{36\pi}{\frac{4}{3}\pi} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$\text{کره} \quad S = 4\pi r^2 = 4 \times 3 \times 3 \times \pi = 36\pi \quad \text{مساحت کره}$$

۳۱- گزینه «۲»

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4 / \Delta\pi \Rightarrow r^3 = \frac{\frac{9}{2}\pi}{\frac{4}{3}\pi} \Rightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$4\pi r^2 = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \pi = 9\pi$$

۳۲- گزینه «۱»

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} \xrightarrow{R=\frac{1}{\pi}} \frac{V}{S} = \frac{\frac{1}{\pi}}{3} = \frac{1}{3\pi}$$

۳۳- گزینه «۳»

مساحت کره چهار برابر مساحت دایره عظیمه آن است در نتیجه مساحت نیم کره دو برابر مساحت دایره عظیمه آن خواهد بود.

$$S = 4\pi r^2$$

$$\text{کیلوگرم } S = 4\pi r^2 \Rightarrow 2 / 5 \times 2 = 5$$

۳۴- گزینه «۲»

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = 3 \times 3^2 \times 8$$

$$\text{نصف حجم استوانه} = 4 \times 3^3$$

$$\text{حجم جسم} = 6 \times 6 \times 8$$

$$\text{حجم جسم با کسر نصف حجم استوانه} = (6 \times 6 \times 8) - (4 \times 3^3) = 180$$

۳۵- گزینه «۴»

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{2}{1}$$

۳۶- گزینه «۴»

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = 4R$$



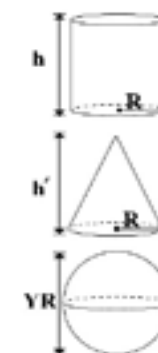
۳۷- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \text{حجم نیم کره} &= \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \times \frac{1}{2} = \frac{4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{6} = 16 \text{ cm}^3 \\ \text{حجم مخروط} &= \frac{12 \times 2 \times 2 \times 3}{3} = 48 \text{ cm}^3 \\ \text{جرم جسم} &= 64 \times 25 = 1600 \Rightarrow \text{حجم کل جسم} = 48 + 16 = 64 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

۳۸- گزینه «۳»

با تجسم کردن شکل به راحتی مشاهده می‌شود که وقتی ارتفاع خیلی خیلی کوچک (نزدیک به صفر) و یا وقتی خیلی خیلی بزرگ (نزدیک به ۲۰۰) باشد، حجم آن بسیار کم است. لذا حجم بزرگ می‌شود تا به مقدار حداکثری برسد و سپس دوباره شروع به کوچک شدن می‌کند.

۳۹- گزینه «۴»



$$\text{حجم استوانه قائمی به قاعده‌ای به شعاع R و ارتفاع h} = h \times \pi R^2$$

$$\text{حجم مخروط قائمی به قاعده‌ای به شعاع R و ارتفاع h'} = \frac{h' \times \pi R^2}{3}$$

$$\text{حجم کره‌ای به شعاع R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

۴۰- گزینه «۴»

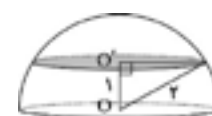
قطره کره = ضلع مکعب

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4 / 5\pi \Rightarrow R^3 = \frac{4 / 5\pi}{\frac{4}{3}\pi} \Rightarrow R^3 = 3 / 375 \Rightarrow R = 1 / 5$$

$$\text{هر ضلع مکعب} = 1 / 5 \times 2 = 3$$

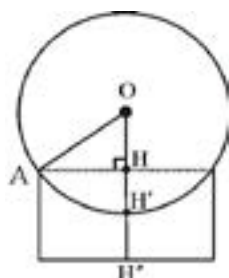
$$V = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

۴۱- گزینه «۱»



$$\begin{aligned} \widehat{O'} &= 90^\circ \rightarrow OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \rightarrow 4 = 1 + O'A^2 \rightarrow O'A = \sqrt{3} \\ \text{مساحت ناحیه رنگی} &= \pi \times (O'A)^2 \rightarrow \text{مساحت ناحیه رنگی} = \pi \times 3 \end{aligned}$$

۴۲- گزینه «۴»



$$\begin{aligned} AH &= 6 \\ OA &= 10 \rightarrow OA^2 = OH^2 + HA^2 \\ H &= 90^\circ \\ \rightarrow OH^2 &= 100 - 36 \rightarrow OH = 8 \\ OH &= 8 \\ OH' &= 10 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} HH' = 2 \rightarrow H'H'' = 3$$

۴۳- گزینه «۲»

$$\text{شعاع قاعده قوطی} = 6 \div 2 = 3 \text{ cm}$$

$$\text{ارتفاع قوطی} = 6 \times 5 = 30$$

$$\text{حجم استوانه (قوطی)} = 3 \times 3 \times \pi \times 30 = 270\pi$$

$$\text{حجم یک توپ (کره)} = \frac{4}{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times \pi = 36\pi$$

$$\text{حجم ۵ توپ} = 36\pi \times 5 = 180\pi$$

$$\text{فضای خالی} = 270\pi - 180\pi = 90\pi \Rightarrow \frac{90\pi}{36\pi} = 2 / 5$$

۴۴- گزینه «۳»

مرکز توپ‌ها رأس‌های یک مکعب به ضلع ۶ را تشکیل می‌دهد و بدیهی است که بیش‌ترین فاصله بین دو رأس یک مکعب برابر قطر آن یعنی $\sqrt{3}$ برابر ضلع مکعب می‌باشد.

۴۵- گزینه «۳»

کره بر روی هر صفحه گذرنده از آن یک دایره تولید می‌کند. دایره روی صفحه وسطی دایره‌ای است به شعاع ۱۳ و مساحت آن برابر است با 169π . دایره روی صفحه‌های جانبی دایره‌هایی به مساحت ۵ می‌باشند. چرا که شعاع این دایره‌ها به همراه فاصله دو صفحه، دو ضلع قائم‌الزاویه‌ای را می‌سازند که وتر آن برابر شعاع کره یعنی ۱۳ می‌باشد پس اگر این شعاع را r در نظر بگیریم:

$$r^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

پس مساحت هر کدام از دو دایره روی صفحه‌های کناری برابر 25π می‌باشد در نهایت مساحت ۳ شکل برابر خواهد بود با:

$$169\pi + 25\pi + 25\pi = 219\pi$$



۴۶- گزینه «۱»



$$\begin{cases} V + \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \pi R^2 \times 6 \\ V + \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \pi R^2 \times 12 \end{cases} \rightarrow \frac{4}{3}\pi \times 189 = 6\pi R^2 \rightarrow R = \sqrt{42}$$

