

۱- گزینه «۳»

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{1388} = (-1) + (+1) + (-1) + \dots + (+1) = 0$$

۲- گزینه «۱»

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots + (-1) = -1$$

۳- گزینه ۳

$$x = 5^{2^7} = 5^8 \Rightarrow x^{16} = (5^8)^{16} = 5^{128} \Rightarrow 5x^{16} = 5^{129}$$

۴- گزینه «۴»

چون پرانتز ندارند توان‌ها را به توان می‌رسانیم.

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536$$

۵- گزینه «۲»

$$(9^3)^3 = 9^9 = (3^2)^9 = 3^{18}$$

$$\sqrt{3^{18}} = 3^9$$

۶- گزینه «۲»

$$4^{n+1} = (2^2)^{n+1} = 2^{2n+2} \Rightarrow (2^{2n+2})^4 = 2^{8n+8} \Rightarrow 2^{8n+8} \Rightarrow 2^{8n+8} \div 2^1 = 2^{8n+7}$$

۷- گزینه «۱»

$$\begin{cases} 8^{67} = (2^3)^{67} = 2^{201} \\ 4^{100} = (2^2)^{100} = 2^{200} \end{cases} \Rightarrow 2^{201} \div 2^{200} = 2^1$$

دو برابر است.

۸- گزینه «۱»

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 12^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^7 \times 12^6} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times 12^4} = \frac{1}{9^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

پاسخ تشریحی فصل سوم توان



۹- گزینه «۳»

$$\frac{\frac{1}{36} \times \frac{1}{8} \times 1 \cdot 12 \times \frac{5}{8}}{\frac{1}{36} \times \frac{1}{8}} = 5 \times 1 \cdot 12$$

۱۰- گزینه «۲»

$$9^1 \times \left(\frac{1}{3^4}\right)^4 \div \frac{1}{1 \cdot 3} = (3^2)^1 \times \frac{1}{3^{16}} \div 1 \cdot 3 = 3^{16} \times \frac{1}{3^{16}} \div 1 \cdot 3 \Rightarrow 1 \div 1 \cdot 3 = 0 \cdot 3$$

۱۱- گزینه «۱»

$$\frac{4^{2a+1} \div 4^{2a-1}}{8^{2b+1} \times 8^{2-b}} = \frac{4^{2a+1-(2a-1)}}{8^{2b+1+(2-b)}} = \frac{4^2}{8^4} = \frac{2^4}{2^4 \times 2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

۱۲- گزینه «۴»

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^5 \times \left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 \times \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2}$$

۱۳- گزینه «۴»

$$5^{-2} \xrightarrow{\text{مکعب}} (-5^{-2})^3 = -5^{-6} \xrightarrow{\text{نصف}} -\frac{1}{2} 5^{-6} \xrightarrow{\text{مربع}} \frac{1}{4} 5^{-12} = \frac{5^{-12}}{4}$$

۱۴- گزینه «۱»

$$(-x^{-1})^{-1} = (-x)^{+1} \xrightarrow{\text{قرینه}} (-x) = x$$

۱۵- گزینه «۳»

$$[2-3(-1)^{-1}]^{-1} = [2-3(-1)]^{-1} = [2+3]^{-1} = \frac{1}{5}$$

۱۶- گزینه «۴»

$$\frac{5}{1+(1+2^{-1})^{-1}} = \frac{5}{1+(1+\frac{1}{2})^{-1}} = \frac{5}{1+(\frac{3}{2})^{-1}} = \frac{5}{1+\frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

۱۷- گزینه «۲»

$$\frac{\frac{1}{36} + \frac{1}{8}}{3 + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{11}{72}}{\frac{17}{16}} = \frac{22}{153}$$

۱۸- گزینه «۲»

$$(\sqrt{2})^{-4} \times (2-2^{-2})^{-1} \div (16)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} \times (2-\frac{1}{2^2})^{-1} \div (2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \div (2)^{-3} \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right) \div \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۹- گزینه «۲»

$$\frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{8}}{18+16} = \frac{\frac{17}{72}}{\frac{34}{1}} = \frac{1}{144}$$

۲۰- گزینه «۳»

$$[(\frac{1}{2})^{-1} - (\frac{3}{2})^{-2}]^{-1} = (2 - \frac{4}{9})^{-1} = \frac{9}{14}$$

۲۱- گزینه «۴»

$$\frac{1}{9} \{ \lambda - \lambda [9 - 9(\lambda - 9)^{-1}]^{-1} \} = \frac{1}{9} \{ \lambda - \lambda [9 - 9(-1)]^{-1} \} = \\ \frac{1}{9} \{ \lambda - \lambda (18)^{-1} \} = \frac{1}{9} \{ \lambda - \lambda (\frac{1}{18}) \} = \frac{1}{9} (\lambda - \frac{\lambda}{9}) = \frac{1}{9} (\frac{8\lambda}{9}) = \frac{8\lambda}{81}$$

۲۲- گزینه «۳»

$$\frac{y^4 x^6}{x^4 y^2} \div \frac{x^{-6} y^{-2}}{x^4 y^{-6}} = yx^2 \div \frac{y^4}{x^{10} y^2} \Rightarrow yx^2 \div \frac{y}{x^{10}} \Rightarrow yx^2 \times \frac{x^{10}}{y} = x^{12}$$

۲۳- گزینه «۲»

$$5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 5 \times 5^2 = 5^4 \\ \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^4 \text{ معکوس}$$



۲۴- گزینه «۴»

$$3 \times 45^6 \div 15^6 \times 3^7 = \frac{3 \times 45^6}{15^6 \times 3^6} = 1$$

۲۵- گزینه «۴»

$$\frac{2^{59}(2+1+\frac{1}{2})}{2^{59}} = \frac{7}{2}$$

۲۶- گزینه «۲»

$$5^{98} = \frac{5^{100}}{5^2} = \frac{(5^{50})^2}{5^2} = \frac{(25x+50)^2}{25} = \frac{[5(5x+10)]^2}{25} = (5x+10)^2$$

۲۷- گزینه «۴»

$$2 \times 7^2 + 7^2 \times x = 7^{30}$$

$$7^2(2+x) = 7^{30} \Rightarrow (2+x) = \frac{7^{30}}{7^2} = 7^{28} \Rightarrow 7^{28} = x+2$$

۲۸- گزینه «۱»

$$5^{28} = 25m+100 \Rightarrow 5^2 \times 5^{26} = 25(m+4) \Rightarrow 5^{26} = m+4$$

۲۹- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} 5^1 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{19} &= A \\ \Rightarrow 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{19} &= A - 5^1 = A - 1 \\ \Rightarrow \underbrace{5(5^1 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{18})}_{A-5^{19}} &= A - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5A - 5^{20} = A - 1 \Rightarrow 4A = 5^{20} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{20} - 1}{4}$$

۳۰- گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} &\underbrace{2^{100} + 2^{100}}_{2 \times 2^{100} = 2^{101}} + 2^{101} + 2^{102} + \dots + 2^{200} \\ &\underbrace{2^{101} + 2^{101}}_{2 \times 2^{101} = 2^{102}} \\ &\underbrace{2^{102} + 2^{102}}_{2 \times 2^{102} = 2^{103}} \\ &\dots \underbrace{2^{200} + 2^{200}}_{2 \times 2^{200} = 2^{201}} \end{aligned} \right\} \text{حاصل} = 2^{201}$$

۳۱- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+\dots+50 &= \frac{X}{2} \\ 7^4 \times 7^6 \times 7^8 \times \dots \times 7^{98} &= 7^{4+6+8+\dots+98} \\ 4+6+8+\dots+98 &= 2(\underbrace{2+3+4+\dots+49}_{\frac{X}{2}-51}) = X - 102 \end{aligned}$$

۳۲- گزینه «۴»

$$\frac{(a^7 + a^5 + a^6 + \dots + a^{11})}{a^{-15}(a^7 + a^5 + a^6 + \dots + a^{11})} = \frac{1}{a^{-15}} = a^{15} = -2^{15}$$

۳۳- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} &(\underbrace{0/\dots\dots 12}_{\text{ت} n-1})^7 \times (\underbrace{0/\dots\dots 2}_{\text{ت} n-1}) \times (\underbrace{0/\dots\dots 5}_{\text{ت} n}) = \\ &(\frac{1}{2 \times 10^{-n}})^7 \times 2 \times 10^{-n} \times 5 \times 10^{-n-1} = 1/44 \times 10^{-7n} \times 10 \times 10^{-n-1} = 1/44 \times 10^{-4n} \end{aligned}$$

۳۴- گزینه «۳»

$$100 < x^2 < 200 \Rightarrow \sqrt{100} < x < \sqrt{200} \Rightarrow 10 < x < 14/\dots \Rightarrow x = 11, 12, 13, 14$$

۳۵- گزینه «۱»

از عدد ۵۶۱۷۵ جذر می گیریم باقی مانده عددی است که باید کم کنیم.

$$56175 = (237)^2 + 6$$

۳۶- گزینه «۲»

$$\left. \begin{aligned} &1000 \leq k^2 \leq 9999 \\ &k \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{1000} \leq k \leq \sqrt{9999} \Rightarrow \left. \begin{aligned} &31/000 \leq k \leq 99/000 \\ &k \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 32 \leq k \leq 99$$

$$\Rightarrow k = 99 - 32 + 1 = 68 = \text{تعداد مربع کامل چهار رقمی} = \text{تعداد } k$$

۳۷- گزینه «۴»

توان های عدد ۵ و ۷ فرد است.

$$\begin{aligned} 14000 &= 2^4 \times 5^3 \times 7 \\ 5 \times 7 &= 35 \end{aligned}$$



۳۸- گزینه «۲»

در تجزیه یک عدد به عامل‌های اول اگر توان همه عامل‌ها زوج باشد آن عدد مجذور کامل است و اگر توان عامل یا عامل‌هایی فرد باشد در صورتی که آن عدد را به عامل‌های دارای توان فرد ضرب کنیم به مجذور کامل تبدیل می‌شود.

۳۹- گزینه «۲»

بعد از تجزیه به عامل‌های اول باید توان عامل‌های زوج باشد.

$$3^1 \times 7^1 \times (2^2 \times 3)^5 = 3^1 \times 7^1 \times 2^{10} \times 3^5 \Rightarrow 3^6 \times 7^1 \times 2^{10}$$

توان عدد ۷ فرد است یعنی باید در عدد ۷ ضرب شود.

۴۰- گزینه «۴»

برای مکعب بودن عدد توان هر یک از پایه‌ها باید مضرب ۳ باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$2^5 \times 3^6 \times 5^7 \div \underbrace{2^2 \times 5^1}_{2^0} = 2^3 \times 3^6 \times 5^6$$

۴۱- گزینه «۱»

۴۲- گزینه «۴»

نکته: اولین مجذور کامل بعد از n^2 عدد $(n+1)^2$ می‌باشد.

عدد 9^{15} را به شکل $(3^2)^{15}$ در می‌آوریم که آن برابر است با $(3^{15})^2$

$$\Rightarrow (3^{15})^2 \Rightarrow \text{اولین مجذور کامل بعد از } (3^{15})^2 \Rightarrow (3^{15} + 1)^2 = 3^{30} + 2 \times 3^{15} + 1$$

۴۳- گزینه «۱»

چون a مربع کامل است پس $\sqrt{a}$ یک عدد طبیعی است و عدد طبیعی بعد از آن $1 + \sqrt{a}$ می‌باشد. پس مربع کامل بعدی عبارت است از:

$$(\sqrt{a} + 1)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1$$

۴۴- گزینه «۲»

$4 = 2^2$ مربع کامل است و اگر $x = y$ باشد آن‌گاه xy نیز مربع کامل می‌شود و حاصل ضرب آن‌ها نیز $2^2 \times x^2$ مربع کامل است چون توان‌ها زوج هستند.

۴۵- گزینه «۳»

۹ قابل قبول نیست زیرا عدد ۳ رقمی نمی‌شود.

$$\overline{a(2a)} = a + 10(2a) + 100a - 121a = 11^2 a \Rightarrow a = 1, 4, 9$$

$$1 + 4 = 5$$

۴۶- گزینه «۳»

۴۷- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} 6 &\rightarrow 476^{134} \text{ رقم یکان} \\ 2 &\rightarrow 12 = 6 + 6 \Rightarrow 6 \\ 6 &\rightarrow 134^{476} \text{ رقم یکان} \end{aligned}$$

۴۸- گزینه «۴»

$$7 \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 27 = 3^3 \xrightarrow{3 = \text{باقیمانده } 39 \text{ بر } 4} 3^{39} = (3^{13})^3$$

۴۹- گزینه «۴»

$$0 \times 1 = 0 \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 691 \times 690 = 690 + 690 + \dots + 1380 = 690 \times 690 \text{ تعداد}$$

۵۰- گزینه «۴»

راه حل اول:

عدد ۳ وقتی به توان می‌رسد یکان‌های حاصل (۱, ۷, ۹, ۳) و تکرار آن‌ها خواهد بود.

چون ۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است پس حالت چهارم یکان حاصل می‌شود که عدد ۱ می‌باشد بنابراین باقی‌مانده نیز برابر ۱ است.

$$\begin{array}{r} 28 \quad | \quad 4 \\ 28 \quad | \quad 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

راه حل دوم:

چون رقم یکان ۱ است به توان ۷ برسد نیز رقم یکان برابر ۱ خواهد شد.

$$3^{28} = (3^4)^7 = (81)^7$$



۶۲- گزینه «۲»

چرا که داریم:

$$\begin{aligned} 2^{5555} &= (2^5)^{1111} = 32^{1111} \\ 3^{3333} &= (3^3)^{1111} = 27^{1111} \\ 7^{2222} &= (7^2)^{1111} = 49^{1111} \\ 5^{2222} &= (5^2)^{1111} = 25^{1111} \\ 6^{2222} &= (6^2)^{1111} = 36^{1111} \\ 8^{2222} &= (8^2)^{1111} = 64^{1111} \\ 2^{6666} &= (2^6)^{1111} = 64^{1111} \end{aligned}$$

۶۳- گزینه «۲»

$$\begin{cases} 393 = 3 \times 131 \\ 524 = 4 \times 131 \\ 917 = 7 \times 131 \end{cases}$$

حالا نامساوی واضح $2^7 < 5^3 < 3^4$ را نوشته طرفین را به توان ۱۳۱ می‌رسانیم.

$$2^{917} < 5^{393} < 3^{524}$$

۶۴- گزینه «۳»

$$10^{-49} - (10^{-50} + 10^{-50}) = 10^{-49} - 10^{-50} - 10^{-50} \Rightarrow 10^{-50} (10 - 1 - 1) \Rightarrow 10^{-50} \times 8$$

۶۵- گزینه «۲»

$$x^{72} > 16^{54} \Rightarrow x^{72} > (2^4)^{54} \Rightarrow x^{72} > 2^{216} \Rightarrow x^{72} > (2^3)^{72} \Rightarrow x^{72} > 8^{72} \Rightarrow x > 8$$

۶۶- گزینه «۳»

$$x \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 10^{-m}$$

هر عدد با توان منفی برابر است با معکوس آن عدد با توان مثبت

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{10}\right)^m \Rightarrow x = 10^m$$

۶۷- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} a - b = 3 &\Rightarrow a = 3 + b \\ \frac{5^{2b+1}}{5^{3+b+b-1}} &= \frac{5^{2b} \times 5}{5^{2b} \times 5^2} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

۶۸- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} 7^{2a-8} &= 7^1 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{2} = 4 \\ 4(4^{-1} - 2 \times 4^{-2}) &= 4\left(\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{16}\right) = 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۶۹- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} 8^{x-2} &= 4^{x-1} \\ (2^3)^{x-2} &= (2^2)^{x-1} \\ 2^{3x-6} &= 2^{2x-2} \Rightarrow 3x - 6 = 2x - 2 \Rightarrow 3x - 2x = 6 - 2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

۷۰- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} 1024 &= 2^{10} \\ 4^{2x+3} &= 2^{4x+6} \Rightarrow 2^{4x+6} = 2^{10} \Rightarrow 4x + 6 = 10 \Rightarrow 4x = 10 - 6 = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

۷۱- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} 5^{2x} \cdot 5^{2x+4} &= 5^{12} \Rightarrow 2x + 2x + 4 = 12 \Rightarrow 4x = 8 \\ x &= \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

در معادله توانی اگر پایه‌ها مساوی باشند از پایه‌ها صرف‌نظر کرده و توان‌ها را مساوی هم قرار داده و معادله را حل می‌کنیم.

۷۲- گزینه «۱»

$$\frac{1}{3} \times (3^2)^{4a-5} = 3^5 \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3^{8a-10} = 3^5 \Rightarrow 3^{8a-11} = 3^5 \Rightarrow 8a - 11 = 5 \Rightarrow 8a = 16 \Rightarrow a = 2$$



۷۳- گزینه «۱»

$$\begin{aligned}
 3^{4x-1} \times 27^{x+1} &= 81^{3x-3} \\
 3^{4x-1} \times 3^{3x+3} &= 3^{12x-12} \\
 3^{(4x-1)+(3x+3)} &= 3^{(12x-12)} \Rightarrow 4x-1+3x+3=12x-12 \\
 &\Rightarrow 4x+3x-12x=-12-3+1 \\
 &\Rightarrow -5x=-14 \Rightarrow x=\frac{-14}{-5}=\frac{14}{5}
 \end{aligned}$$

۷۴- گزینه «۲»

$$\begin{aligned}
 2^{6x+3} \times 2^{3x+6} &= 2^{12x+15} \\
 2^{9x+9} &= 2^{12x+15} \Rightarrow 9x+9=12x+15 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2
 \end{aligned}$$

۷۵- گزینه «۲»

$$5^{2x} \times 5 \times 2^{2x} = \frac{5}{100} \Rightarrow 5^{2x} \times 2^{2x} = \frac{5}{100} \div 5 \Rightarrow 10^{2x} = 10^{-2} \Rightarrow x=-1$$

۷۶- گزینه «۳»

$$\begin{aligned}
 64^{x-1} \div 4^{x-1} &= 256^{2x} \\
 16^{x-1} &= 16^{4x} \Rightarrow x-1=4x \Rightarrow x-4x=1 \\
 -3x &= 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

۷۷- گزینه «۱»

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} = 16$$

۷۸- گزینه «۲»

هر عدد با توان منفی برابر است با معکوس آن عدد با توان مثبت $\left(\frac{1}{36}\right)^{-2x} = 36^{2x}$ در معادله‌های توانی اگر پایه‌ها مساوی باشند توان‌ها را مساوی هم قرار داده و معادله را حل می‌کنیم.

$$36^{2x} = 36^1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

۷۹- گزینه «۲»

$$\begin{aligned}
 2^{(2x-3)^2} + 8 &= 72 \Rightarrow 2^{(2x-3)^2} = 72-8=64 \\
 2^{(2x-3)^2} &= 2^6 \Rightarrow (2x-3)^2 = 6 \Rightarrow 2x-3 = \sqrt{6} \\
 2x &= 3 + \sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

۸۰- گزینه «۴»

$$\begin{aligned}
 3^2 \times 3^{x+2} + 5^{x+2} &= 3^{x+4} + 5^{2x+6} \\
 3^{x+4} - 3^{x+4} + 5^{x+2} &= 5^{2x+6} \Rightarrow x+2=2x+6 \Rightarrow -x=4 \Rightarrow x=-4
 \end{aligned}$$

۸۱- گزینه «۱»

$$(2a)^{rb} = r = a^b \cdot x^b \Rightarrow ((2a)^r)^b = (ax)^b \Rightarrow 4a^r = ax \Rightarrow x = 4a$$

۸۲- گزینه «۱»

$$144 = 9 \times 2^4 = 3^2 \times 3^{4x} = 3^{4x+2} = 9^{2x+1}$$

۸۳- گزینه «۲»

$$3^{n+2} = 3^n \times 3^2 = 100 \times 9 = 900$$

۸۴- گزینه «۴»

$$\begin{aligned}
 27^{\frac{k}{r}} &= (3^r)^{\frac{k}{r}} = 3^k \\
 3^{2k+1} &= 6a \Rightarrow 3^{2k} \times 3 = 6a \Rightarrow 3^{2k} = 2a \Rightarrow (3^k)^2 = 2a \Rightarrow 3^k = \sqrt{2a}
 \end{aligned}$$

۸۵- گزینه «۱»

$$10^{2n-1} = 2 \Rightarrow 10^{2n} \div 10^1 = 2 \Rightarrow 10^{2n} = 20 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 (100)^{2n+1} \div 100 &= 10^{4n+2} \div 10^2 \Rightarrow 10^{4n+2-2} = 10^{4n} \quad (2) \\
 \Rightarrow (1), (2) &\Rightarrow 10^{4n} = (10^{2n})^2 = 20^2 = 400
 \end{aligned}$$

۸۶- گزینه «۱»

$$10^{2x} = 25 \Rightarrow 10^x = 5 \Rightarrow 10^{-x} = \frac{1}{5}$$



۸۷- گزینه «۱»

$$3^{-b} = 5 \Rightarrow 5^{-a} = (3^{-b})^{-a} = 3 \Rightarrow 3^{ab} = 3^1 \Rightarrow ab = 1$$

$$(3ab - 2)^{100} \Rightarrow (3 \times 1 - 2)^{100} = 1^{100} = 1$$

۸۸- گزینه «۳»

$$3^{-b} = 7 \Rightarrow \begin{cases} (7^{-a})^{-b} = 7 \Rightarrow 7^{ab} = 7 \Rightarrow ab = 1 \\ 7^{-a} = 3 \Rightarrow (3ab - 1)^{100} = (3 \times 1 - 1)^{100} = 1^{100} = 1 \end{cases}$$

۸۹- گزینه «۴»

$$2^x = 2^{3y+3} \Rightarrow x = 3y + 3$$

$$9^y = 3^{x-9} \Rightarrow 3^{2y} = 3^{3y+3-9} \Rightarrow 2y = 3y + 3 - 9 \Rightarrow -y = -6 \Rightarrow y = 6$$

$$x = 3 \times 6 + 3 \Rightarrow x = 21$$

$$x + y = 21 + 6 = 27$$

۹۰- گزینه «۱»

$$A = 2^{m-2} \Rightarrow A^2 = 2^{6m-6}$$

$$B = 2^{3-2m} \Rightarrow B^2 = 2^{6-6m} \Rightarrow A^2 B^2 = 1$$

۹۱- گزینه «۴»

$$A = 2^{m+2} \Rightarrow A^2 = 2^{2m+6}$$

$$B = 2^{2m+2} \Rightarrow \frac{A^2}{B} = 2^6 \Rightarrow A^2 = 16B$$

۹۲- گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} a^x = c^t &\Rightarrow a^{xz} = c^{tz} \\ a^z = c^y &\Rightarrow a^{zx} = c^{yx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^{yx} = c^{tz} \Rightarrow xy = zt$$

۹۳- گزینه «۱»

$$6^{10} \Leftrightarrow 3^{10} \times 3^{10}$$

$$2^{2m} \times 3^n = 3^{10} \times 3^{10} \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5, n = 10$$

۹۴- گزینه «۱»

$$81 \times 9^x - 9^x = 240$$

$$80 \times 9^x = 240$$

$$9^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۹۵- گزینه «۱»

$$2^{6x+9} = 2^5 \times 2^{2x}$$

$$6x + 9 = 5 + 2x \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2$$

۹۶- گزینه «۱»

$$\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8 \Rightarrow 2^{2x-x-y} = 2^3 \Rightarrow x - y = 3$$

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \Rightarrow 3^{2x+2y-5y} = 3^5 \Rightarrow 2x - 3y = 5$$

$$-3 \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 3y = -9 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = -4 \Rightarrow x = 4 \\ 4 - y = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow xy = 4 \times 1 = 4$$

۹۷- گزینه «۲»

$$\left(\frac{a}{b} = 12 - 3 = 9\right) \frac{y}{x} = -5 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b} + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

۹۸- گزینه «۴»

$$\frac{5^{2x-2}(\Delta-1)}{3^{2x-2}(9+1)} = \frac{250}{9} \Rightarrow \frac{5^{2x-2}}{3^{2x-2}} = \frac{625}{9} = \frac{5^4}{3^2}$$

$$\begin{cases} 5^{2x-2} = 5^4 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ 3^{2x-2} = 3^2 \Rightarrow 2x - 2 = 2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

۹۹- گزینه «۳»

$$\frac{2^{2n-3} + 2^{1-n} \times 3^{1-n}}{5^{1-n}(4^{1-n} \times 4^{6n-3} + 3^{1-n})} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{2^{1-n}(2^{1 \cdot n-3} + 3^{1-n})}{5^{1-n}(4^{6n-2} + 3^{1-n})} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{1-n} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \Rightarrow 1-n = -3 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \sqrt{n} = 2$$



۱۰۰- گزینه «۲»

$$12y^a - 14x^a = 6x^a + 9y^a$$

$$12y^a = 20x^a$$

$$\frac{x^a}{y^a} = \frac{12}{20} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{3}{5}$$

۱۰۱- گزینه «۳»

$$5m^n - 10n^n = 6n^n - 8m^n \Rightarrow 13m^n = 16n^n \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^n = \frac{16}{13} \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^{-n} = \frac{13}{16}$$

۱۰۲- گزینه «۲»

$$a^{ax} = a^{(a+a)} \Rightarrow (ax = a^{a+1} + a) \times \frac{1}{a}$$

$$x = \frac{a^{a+1} + a}{a} = \frac{a^{a+1}}{a} + \frac{a}{a} = a^a + 1$$

۱۰۳- گزینه «۳»

$$A^x = ((x^{x^x})^{x^x})^x = (x^{x^x})^{x^x \times x} = (x^{x^x})^{x^{x+1}} = x^{x^x \cdot x^{x+1}} = x^{x^{2x+1}}$$

۱۰۴- گزینه «۲»

$$5x^{rx^{rx}} = 5(x^{rx})^r = 5t^r$$

۱۰۵- گزینه «۴»

$$(a^{a^a})^x = a^{a^{ra}} \Rightarrow a^{a^a \cdot x} = a^{a^{ra}} \Rightarrow a^a \cdot x = a^{ra} \Rightarrow x = \frac{a^{ra}}{a^a} = a^a$$

۱۰۶- گزینه «۱»

حاصل جذر یک عدد همواره مثبت یا صفر است. پس برای این که عدد $(-x)$ مثبت یا صفر باشد:

$$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

۱۰۷- گزینه «۴»

$$\frac{4^5}{\sqrt{16}} = \frac{4^5}{4} = 4^4$$

$$4^4 \div 4 = 4^3 \text{ ربع عدد}$$

$$(4^3)^2 = 4^6 \Rightarrow (4^6)^2 = 4^{12} \text{ مجذور عدد}$$

۱۰۸- گزینه «۴»

$$81^4 = 3^{16} \Rightarrow \sqrt{3^{16}} = 3^8$$

۱۰۹- گزینه «۳»

به تعداد عدد وسطی، رقم یک در کنار هم قرار می گیرد.

۱۱۰- گزینه «۲»

$$5^2 \times 2^7 = 1600$$

$$\sqrt{2^7 \times 5^2} = 2^{\frac{7}{2}} \times 5^{\frac{2}{2}} \Rightarrow a = \frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

$$a - b = 3 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2} = 2$$

برای جذر گرفتن توان ها عامل ها را نصف می کنیم.

۱۱۱- گزینه «۱»

$$\sqrt{5^3 \times 2^4 \times 9 \times 5} = \sqrt{5^4 \times 2^4 \times 3^2} = 5^2 \times 2^2 \times 3 = 300$$



۱۱۲- گزینه «۲»

ابتدا اعداد داده شده را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. اگر توان همه عامل‌ها زوج باشد آن عدد مجذور کامل است و برای به‌دست آوردن جذر عدد پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را نصف می‌کنیم.

$$3^2 = 9$$

$$5^6 = 25^3$$

$$2^6 = 64$$

$$3^4 = 81$$

$$3^4 \times 2^6 \times 5^6 \times 3^2$$

$$\sqrt{3^6 \times 5^6 \times 2^6} = 3^3 \times 5^3 \times 2^3 = 30^3$$

چون توان‌ها با هم مساویند پایه‌ها را به هم ضرب کرده و یکی از نماها را می‌نویسیم.

۱۱۳- گزینه «۱»

۱۱۴- گزینه «۳»

$$\frac{((4^{x+1})^2)^3}{\sqrt{3^{2x}}} = \frac{4^{6x+6}}{\sqrt{3^{1 \cdot x}}} = \frac{2^{12x+12}}{3^{0.5x}} = 2^{12x+12}$$

۱۱۵- گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} (4^{x+1})^2 &= 4^{2x+2} \\ \sqrt{16^{2x}} &= 16^x = 4^{2x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4^{2x+2}}{4^{2x}} = \frac{4^{2x} \times 4^2}{4^{2x}} = 4^2 = 2^4$$

۱۱۶- گزینه «۳»

۱۱۷- گزینه «۱»

$$(a-1)^2 = (a-3)(a+1) + k$$

$$a^2 - 2a + 1 = a^2 - 2a - 3 + k \Rightarrow k = 4$$

۱۱۸- گزینه «۱»

$$\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} = |\sqrt{5}-4| = 4-\sqrt{5}$$

۱۱۹- گزینه «۴»

$$[2(\sqrt{20}+4)]^{20} (\sqrt{20}-4)^{20} = 2^{20} (20-16)^{20} = 2^{20} (4)^{20} = 2^{20} \times 2^{40} = 2^{60}$$

۱۲۰- گزینه «۱»

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

$$\sqrt{3^{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{3^{\sqrt{3}}} = \sqrt{3^2} = 3$$

۱۲۱- گزینه «۴»

$$x = (\sqrt{1+\sqrt{2}}) \Rightarrow x^2 = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x^4 = (1+\sqrt{2})^2 = 1+2+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

۱۲۲- گزینه «۳»

$$(\sqrt{3}+3\sqrt{3})^4 = (4\sqrt{3})^4 = 2304$$

۱۲۳- گزینه «۴»

$$\sqrt[4]{(25)^2} - \sqrt[4]{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = (25)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} - \sqrt{\frac{9}{4}} = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

۱۲۴- گزینه «۴»

$$A = 10\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = (10-18+8)\sqrt{2} = 0$$

۱۲۵- گزینه «۲»

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۲۶- گزینه «۱»

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{9-4 \times 2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{1} = 3+2\sqrt{2}$$

۱۲۷- گزینه «۴»

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3+\sqrt{6}}{1} = 3+\sqrt{6}$$



۱۲۸- گزینه «۳»

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1=4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۱۲۹- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \frac{10}{a} &= \frac{10}{\sqrt{2005} + \sqrt{1995}} \times \frac{\sqrt{2005} - \sqrt{1995}}{\sqrt{2005} - \sqrt{1995}} = \frac{10(\sqrt{2005} - \sqrt{1995})}{2005 - 1995} \\ &= \frac{10(\sqrt{2005} - \sqrt{1995})}{10} = \sqrt{2005} - \sqrt{1995} \end{aligned}$$

۱۳۰- گزینه «۳»

نکته: اگر $\sqrt{n}$ و $\sqrt{n+1}$ تعریف شده باشند، همواره داریم:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

با توجه به نکته قبل:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

