

فصل یازدهم

پاسخ تشریحی

هم نهشتی، تالس، تشابه

۱- گزینه «۴»

در حالت (ض‌ض) دو مثلث مساویند.

(زیرا اگر زاویه رأس با هم برابر باشد دو زاویه مجاور به قاعده‌ها نیز با هم برابر می‌شوند)

۲- گزینه «۴»

مثلث مورد نظر به شکل زیر است که زاویه‌های آن عبارتند از:

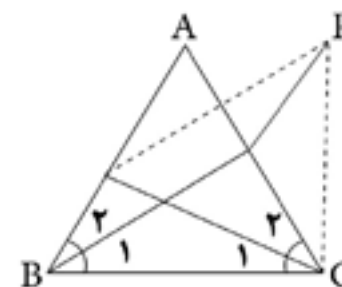
$$۱۲۰^\circ, ۳۰^\circ, ۳۰^\circ$$



۳- گزینه «۳»

۴- گزینه «۲»

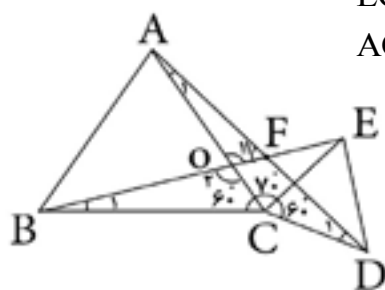
در شکل زیر BD نیم‌ساز زاویه B و CE نیم‌ساز زاویه C است. از «برهان خلف» مسئله را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\hat{B} > \hat{C}$ است در این صورت $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 > \hat{C}_1 = \hat{C}_2$. اگر از E پاره‌خط EP را موازی و مساوی با BD رسم کنیم متوازی‌الاضلاع BEPD به‌دست می‌آید و چون $EC = BD$ پس مثلث EPC متساوی‌الساقین است یعنی $\hat{ECP} = \hat{EPC}$ و $\hat{DPC} < \hat{DCP}$ است که در نتیجه $CD < DP$ پس $CD < BE$ است. از رابطه اخیر نتیجه می‌شود $\hat{B} < \hat{C}$ که این خلاف فرض $\hat{B} > \hat{C}$ است. پس $\hat{B} = \hat{C}$ و شرط $B > C$ درست نیست.



۵- گزینه «۴»

در مثلث ABC و EDC متساوی‌الاضلاع هستند. دو مثلث ACD و BCE در حالت (ض‌ض) برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{ACD} = \hat{BCE} = ۱۳۰^\circ \\ EC = CD \\ AC = BC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle BCE \Rightarrow A_1 = F_1 \quad (۱)$$



حال دو مثلث OAF و BDC را در نظر بگیرید. از آنجا $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$\hat{F}_1 = \hat{C} = ۶۰^\circ$$

۶- گزینه «۲»

دو مثلث ADE و DFC به حالت وتر و یک ضلع با یکدیگر هم‌نهشتند در نتیجه $FD = DE$ و $\hat{ECF} = ۱۵^\circ$ می‌شود داریم:

$$\hat{DEF} = ۴۵^\circ = \hat{ECF} + \hat{EFC} \Rightarrow \hat{EFC} = ۳۰^\circ$$

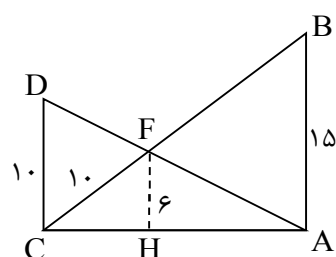
۷- گزینه «۲»

در مثلث CFH داریم:

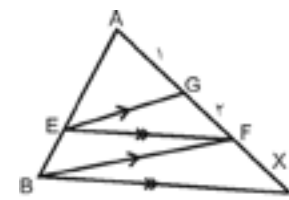
$$\begin{aligned} (CH)^2 &= ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \\ CH &= ۸ \end{aligned}$$

از طرفی بنابر حالت (ز‌ز):

$$\begin{aligned} \triangle AHF &\sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}, \quad \frac{AH+۸}{AH} = \frac{۵}{۳}, \quad ۱ + \frac{۸}{AH} = \frac{۵}{۳} \\ AH &= ۱۲ \Rightarrow AC = ۸ + ۱۲ = ۲۰ \end{aligned}$$



۸- گزینه «۴»



$$\left. \begin{aligned} EG \parallel BF &\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AE}{EB} \\ EF \parallel BC &\rightarrow \frac{2}{x} = \frac{AE}{EB} \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 6$$

۹- گزینه «۲»

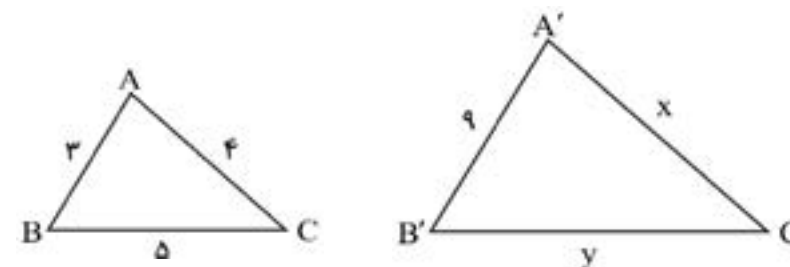
$$\begin{aligned} \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} &\Rightarrow \frac{(2X-2)-X}{X} = \frac{2X-1}{X+2} \Rightarrow \frac{2X-2}{X} = \frac{2X-1}{X+2} \\ &\Rightarrow 2X^2 + 4X - 2X - 4 = 2X^2 - X \\ &\Rightarrow 3X = 4 \Rightarrow X = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$AC = 3X - 2 \Rightarrow AC = 2\left(\frac{4}{3}\right) - 2 = 2$$

۱۰- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} &\Rightarrow \frac{AE}{AE+3} = \frac{1}{12} \Rightarrow 12AE = 8AE + 24 \\ &\Rightarrow 12AE - 8AE = 24 \Rightarrow 4AE = 24 \Rightarrow AE = \frac{24}{4} = 6 \end{aligned}$$

۱۱- گزینه «۱»



$$\text{محیط} = 9 + 12 + 15 = 36$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{4}{x} = \frac{5}{y} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{9 \times 4}{3} = 12 \\ y &= \frac{9 \times 5}{3} = 15 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{قائم الزاویه است}} \text{مساحت } \triangle A'B'C' = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

۱۲- گزینه «۲»

$$180 - (60 + 45) = 75$$

$$60^\circ = 60^\circ$$

$$180 - (60 + 75) = 45$$

$75^\circ = 75^\circ$ زاویه‌های متناظر دو مثلث متساویند و دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

۱۳- گزینه «۳»

$$K = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{25}{S_1} = \frac{225}{64} \Rightarrow S_1 = 7\frac{1}{9}$$

۱۴- گزینه «۲»

$$30 = 14 + 9 + 7 = \text{محیط مثلث کوچک‌تر}$$

$$\frac{14}{30} = \frac{21}{x} \Rightarrow x = \frac{21 \times 30}{14} = 45$$

۱۵- گزینه «۲»

در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است:

$$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

۱۶- گزینه «۳»

نسبت تشابه در مساحت به توان ۲ می‌رسد.

$$\frac{1}{9} = \frac{27}{X}$$

$$X = \frac{27 \times 9}{1} = 243 \text{ cm}^2 \text{ مساحت مثلث بزرگ‌تر}$$

۱۷- گزینه «۱»

$$24 = 5 + 8 + 11 = \text{محیط مثلث } ABC$$

$$\frac{24}{60} = \frac{11}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \times 11}{24} = 27\frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه «۳»

برای آب‌کاری فقط به سطح مجسمه کار داریم و چون نسبت تشابه دو مجسمه ۲ می‌باشد، پس نسبت تشابه مساحت دو مجسمه برابر ۴ است در نتیجه:

$$1925 \times 4 = 7700$$

۱۹- گزینه «۱»

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{x}{96} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{96} \Rightarrow x = 32$$

$$\text{قطر} = \frac{a^2}{r} = 32 \Rightarrow a = 8$$

۲۰- گزینه «۲»

در دو شکل متشابه نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

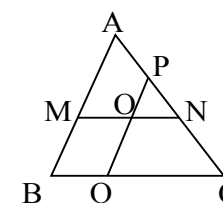
$$\text{نسبت تشابه} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 9$$

۲۱- گزینه «۳»

$$\triangle ABC \sim \triangle AMN \sim \triangle CPQ \sim \triangle PON$$



۲۲- گزینه «۲»

$$DE^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow DE = 3$$

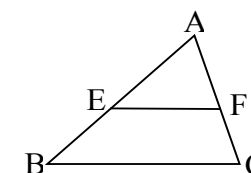
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{5}{5+x}$$

$$15 + 3x = 30 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

۲۳- گزینه «۲»

$$\frac{AB}{AE} = 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}} = K^2 = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{S_{EFCB}}{S_{AEF}} = \frac{3}{1} = 3$$



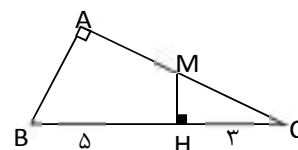
۲۴- گزینه «۱»

$$ABC \sim MHC \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{3}{2x}$$

$$2x^2 = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

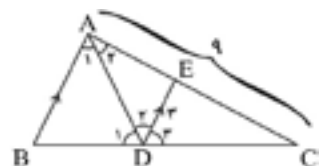
$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$$



۲۵- گزینه «۳»

$$\frac{AM}{AD-AM} = \frac{3}{5-3} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle MCD}}{S_{\triangle MAB}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

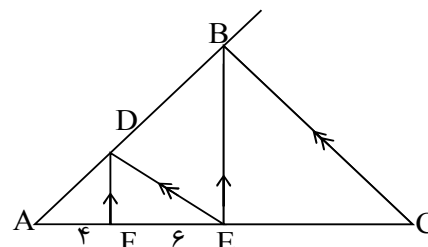


$$\left. \begin{array}{l} AD \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ DE \parallel BA \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_2 \end{array} \right\} \hat{A}_2 = \hat{D}_2 \rightarrow AE = DE = 3 \rightarrow CE = 6$$

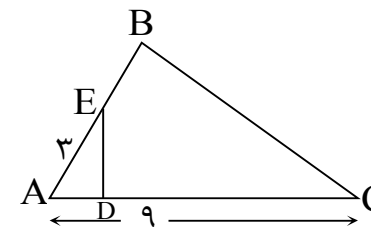
$$DE \parallel BA \rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB} \rightarrow \frac{6}{9} = \frac{3}{AB} \rightarrow AB = 4.5$$

۲۷- گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} DF \parallel BE \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FE} \\ DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{FE} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{10}{EC} \Rightarrow EC = 15$$



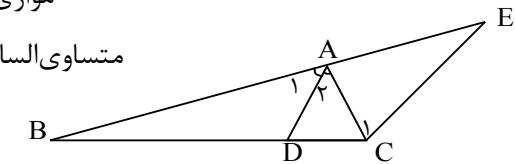
۲۸- گزینه «۳»



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{E} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز}} \triangle AED \sim \triangle ABC$$

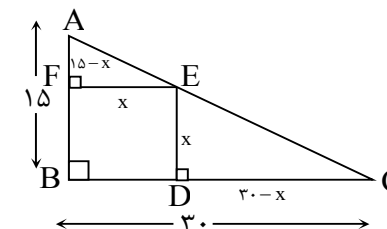
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow DC = 9 - 2 = 7$$

۲۹- گزینه «۱»



موازی و مورب $\hat{A}_1 = \hat{E}$, $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$
 متساوی الساقین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{E} = \hat{C}_1 \Rightarrow AC = AE \Rightarrow$
 $\triangle BAD \sim \triangle BEC$
 $\Rightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{AE}{AB} \xrightarrow{AC=AE} \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}$

۳۰- گزینه «۳»



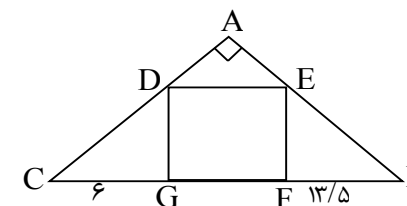
$$AFE \sim CDE \Rightarrow \frac{DE}{AF} = \frac{DC}{EF} \Rightarrow \frac{x}{15-x} = \frac{30-x}{x}$$

$$x^2 = (15-x)(30-x)$$

$$x^2 = 450 - 15x - 30x + x^2$$

$$\Rightarrow 45x = 450 \Rightarrow x = 10$$

۳۱- گزینه «۴»



$$(GF)^2 = CG \times FB$$

$$(GF)^2 = 6 \times 13/5 \Rightarrow GF = \sqrt{81} = 9 \text{ ضلع مربع}$$

$$S = 9 \times 9 = 81 \text{ مساحت مربع}$$

۳۲- گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ENC \Rightarrow \frac{AB}{EN} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{AC}{5}$$

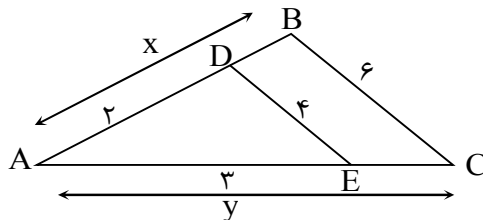
$$\boxed{AC = 10}$$

طبق رابطه فیثاغورس

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (BC)^2 = 100 - 36 \Rightarrow BC = \sqrt{64}$$

$$\boxed{BC = 8}$$

۳۳- گزینه «۴»

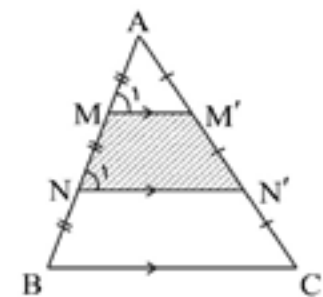


$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{y} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x + 2y = 2 + 9 = 11$$

$$\frac{3}{y} = \frac{4}{6} \Rightarrow y = 4.5$$

۳۴- گزینه «۳»



$$\left. \begin{array}{l} MM' \parallel BC \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز}} \triangle AMM' \sim \triangle ABC$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle AMM'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 \rightarrow \frac{S_{\triangle AMM'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

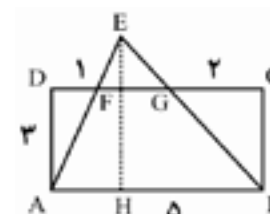
$$\left. \begin{array}{l} MN' \parallel BC \rightarrow \hat{N}_1 = \hat{B} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز}} \triangle ANN' \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{S_{\triangle ANN'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AN}{AB}\right)^2 \rightarrow \frac{S_{\triangle ANN'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{S_{\triangle ANN'} - S_{\triangle AMM'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{مساحت ناحیه هاشور خورده} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

۳۵- گزینه «۱»

در سایر گزینه‌ها دو مثلث با داشتن دو زاویه مساوی متشابهند.

۳۶- گزینہ «۴»

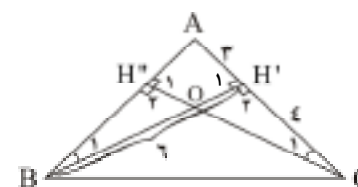


$$\begin{aligned} \text{FG} &= 5 - 2 - 1 = 2 \\ \frac{\text{EH}}{\text{EH}'} &= \frac{\text{FG}}{\text{AB}} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{\text{EH}}{\text{EH} + 3} = \frac{2}{5} \\ \rightarrow 5\text{EH} &= 2\text{EH} + 6 \rightarrow \text{EH} = 2 \rightarrow \text{EH}' = 5 \\ \rightarrow \text{S}_{\text{EAB}} &= \frac{5 \times 5}{2} = 12.5 \end{aligned}$$

۳۷- گزینه «۳»

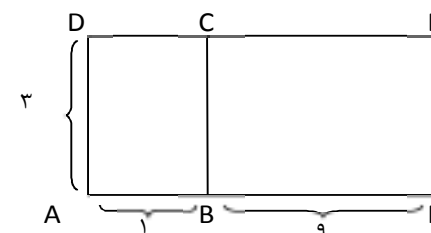
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H}'_1 = \widehat{H}'_7 = 9 \cdot 0 \\ \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 = 9 \cdot -\widehat{A} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta \\ \Delta \end{array} \text{BAH}' \sim \text{COH}'$$

$$\rightarrow \frac{\text{AH}'}{\text{OH}'} = \frac{\text{BH}'}{\text{CH}'} \rightarrow \frac{3}{\text{OH}'} = \frac{6}{4} \rightarrow \text{OH}' = 2$$

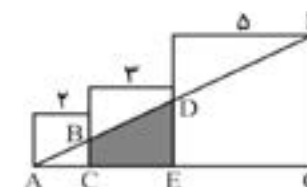


۳۸- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \text{ABCD} \sim \text{BCEF} &\Rightarrow \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{AD}}{\text{CE}} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} &= \frac{3}{\text{CE}} \Rightarrow \text{CE} = 9 \\ \text{BF} &= 9 \\ \Rightarrow \frac{\text{S}_{\text{ADEF}}}{\text{S}_{\text{BCEF}}} &= \frac{3 \times 1}{3 \times 9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$



۳۹- گزینه «۲»



$$\begin{aligned} \frac{AE}{AG} &= \frac{DE}{FG} \rightarrow DE = \frac{AE \times FG}{AG} = \frac{5 \times 5}{10} = 2.5 \\ \frac{AC}{AE} &= \frac{BC}{DE} \rightarrow BC = \frac{AC \times DE}{AE} = \frac{2 \times 2.5}{5} = 1 \\ S &= \left(\frac{BC + DE}{2} \right) \times CE = 2.5 \times 1 = 2.5 \end{aligned}$$

۴۰- گزینه «۳»

راہ حل اول:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array} \right\} \text{تساوی دو زاویه}$$

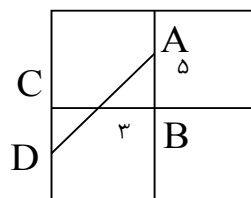
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{EBF} \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BF} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{14/2}{BF} \Rightarrow BF = 9/99$$

$$DF = 14/2 - 9/94 = 4/26$$

راه حل دوم: از رابطه تالس

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DB} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{DF}{14/2} \Rightarrow DF = \frac{14/2 \times 3}{10} = 4/5$$

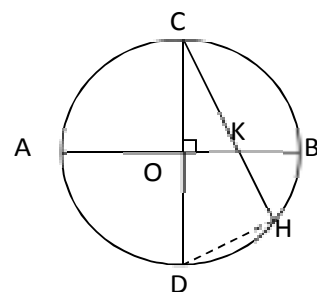
۴۱- گزینہ «۴»



با توجه به صورت سوال ضلع هر مربع کوچک ۷ است و بنابراین پاره خط OC برابر با ۴ است. پس با توجه به تشابه دو مثلث OAB و OCD

می‌توان نوشت $\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$ و در نتیجه $\frac{3}{4} = \frac{5}{X}$ پس $X = \frac{20}{3}$.

۴۲- گزینہ «۴»



در دو مثلث متشابه قائم الزاویه $\triangle OCK$ و $\triangle CHD$ داریم:

$$\frac{OK}{DH} = \frac{OC}{CH}, \quad DH = \epsilon$$

$$\frac{\text{OK}}{6} = \frac{5}{1} \Rightarrow \text{OK} = \frac{30}{1}$$

$$BK = 5 - \frac{30}{1} = \frac{10}{1} = \frac{5}{1} = 1/25$$

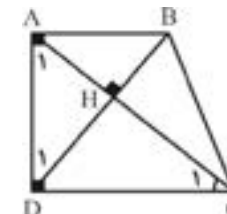
$$AK = \lambda / \gamma \Delta \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{\lambda / \gamma \Delta}{1 / \gamma \Delta} = \gamma$$

۴۳- گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} \text{AH}^{\text{r}} = \text{CH} \times \text{HD} \\ \text{A}^{\Delta} \text{HD} : \text{AD}^{\text{r}} = \text{AH}^{\text{r}} + \text{HD}^{\text{r}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{AD}^{\text{r}} = \text{CH} \times \text{HD} + \text{DH}^{\text{r}} = \text{DH} \times (\text{CH} + \text{DH})$$

$$\Rightarrow \text{AD}^{\text{r}} = \text{DH} \times \text{CD} \Rightarrow \text{AD}^{\text{r}} = \frac{1}{\text{f}} \text{CD} \times \text{CD} = \frac{1}{\text{f}} \text{CD}^{\text{r}} \Rightarrow \text{AD} = \frac{1}{\text{v}} \text{CD}$$

۴۴- گزینه «۲»

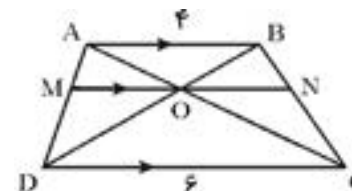


$$\begin{cases} \triangle ADH : \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \triangle ACD : \hat{A}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ADC \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

$$\rightarrow AD^2 = AB \times DC = 4 \times 9 = 36 \rightarrow AD = 6$$

۴۵- گزینه «۳»

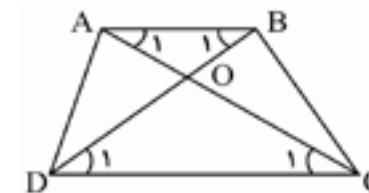


$$\left. \begin{aligned} MO \parallel DC &\rightarrow \frac{MO}{DC} = \frac{AO}{AC} \\ ON \parallel DC &\rightarrow \frac{ON}{DC} = \frac{BO}{BD} \end{aligned} \right\} \frac{MO+NO}{DC} = \frac{AO}{AC} + \frac{BO}{BD}$$

$$\triangle AOB \sim \triangle COD \rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{4}{6} \rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} = \frac{4}{4+6}$$

$$\rightarrow \frac{MO+NO}{DC} = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \rightarrow \frac{MN}{6} = \frac{8}{10} \rightarrow MN = \frac{48}{10} = 4.8$$

۴۶- گزینه «۱»

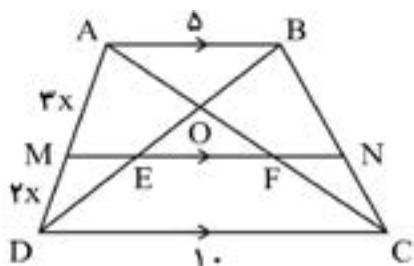


$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{6}\right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{AB}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

۴۷- گزینه «۳»



$$\frac{AM}{MD} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{2}{5}, \quad \frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} ME \parallel AB &\rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{ME}{AB} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{ME}{5} \rightarrow ME = 2 \\ MF \parallel DC &\rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MF}{DC} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{MF}{10} \rightarrow MF = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow EF = 6 - 2 = 4$$